C.E.S.T.I.

CENTRE D'ETUDES SUPERIEURES
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
3, rue F. Hainaut - 93407 St-OUEN Cédex
Tél. (1) 46 06 40 85

CONCOURS D'ENTREE 1986

MATHEMATIQUES I

Epreuve de contrôle de connaissances à orientation : MATHEMATIQUES
Durée 3 heures
LUNDI 09 JUIN 1986 de 9h. à 12h.
Copies de couleur ROSE

Notations : Dans tout le problème $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. I = (a,b) est un intervalle borné de la droite réelle, a < b.

Soit $\mathscr{E}(I)$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

. $f(x) = 0$ pour $x \notin [a,b]$

. f continue sur]a,b[

. f possède une limite f(a+) et f(b-) lorsque x tend respectivement vers a par valeurs supérieures et vers b par valeurs inférieures. On pose alors

$f(a) = f(a+)$ et $f(b) = f(b-)$

$\mathscr{C}$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et on définit les ensembles suivants pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$\mathscr{E}_n(I) = \left\{ f \in \mathscr{E}(I),\ n \text{ fois dérivables sur }]a,b[\text{ telles que } \frac{d^n f}{dx^n} \in \mathscr{E}(I) \right\}$$

$$\mathscr{D}_n(I) = \left\{ f \in \mathscr{E}_n(I) \text{ telles que } \frac{d^k f}{dx^k} \in \mathscr{C} \text{ pour } k = 0,1,2,\ldots,n-1 \right\}$$

$$\mathscr{E}_\infty(I) = \mathscr{E}(I)$$

A tout élément f de $\mathscr{E}(I)$, on associe la fonction $\hat{f} = T(f)$ définie par la transformation T suivante :

(I) $$\boxed{\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixt}\, dx} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(I) I-1 Montrer que tout élement f de $\mathscr{E}(I)$ possède une image $\hat{f}$ définie par la transformation T. Vérifier que les ensembles $\mathscr{E}(I)$, $\mathscr{E}_n(I)$ et $\mathscr{D}_n(I)$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, possédent une structure d'espace vectoriel et que la transformation T est linéaire sur $\mathscr{E}(I)$. Montrer que f et $\hat{f}$ ont même parité et que de plus $\hat{f}$ est réelle lorsque f est paire.

I-2 τ et α sont deux réels strictement positifs et N un entier positif ou nul. On considère alors les quatre fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha\pi \\ 0 & \text{si } |x| > \alpha\pi \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{i\tau x} & \text{si } |x| \leq \alpha\pi \\ 0 & \text{si } |x| > \alpha\pi \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 + \cos(\tau x) & \text{si } |x| \leq \left(\frac{2N+1}{\tau}\right)\pi \\ 0 & \text{si } |x| > \left(\frac{2N+1}{\tau}\right)\pi \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \sin \tau x & \text{si } |x| \leq \left(\frac{2N+1}{\tau}\right)\pi \\ 0 & \text{si } |x| > \left(\frac{2N+1}{\tau}\right)\pi \end{cases}$$

S'assurer que les fonctions $f_i(x)$ sont des éléments de $\mathscr{E}(I_i)$, I_i est un intervalle que l'on précisera, et calculer les images $\hat{f}_i(t)$ de $f_i(x)$ par T lorsque i = 1,2,3,4. Les fonctions $\hat{f}_i(t)$ sont-elles continues ? Quelles sont leurs limites lorsque t devient infiniment grand ($t \to \pm\infty$).

I-3 Exprimer $f_1' = \frac{df_1}{dx}$ et $f_3' = \frac{df_3}{dx}$ pour x appartenant à des sous ensembles de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. Calculer $\hat{f}_1' = T(f_1')$, $\hat{f}_3' = T(f_3')$ et établir une relation simple entre $\hat{f}_3$ et $\hat{f}_3'$. Cette relation est-elle satisfaite par la fonction f_1 ?

I-4 On construit la fonction F(x) à partir des deux fonctions f_1 et f_3 par la relation :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 (x - \xi)\, f_3(\xi)\, d\xi$$

les paramètres τ, α et N ayant les valeurs suivantes : $\tau = 1$, $\alpha = 1$, $N = 0$.

Montrer que F appartient à $\mathscr{E}(-2\pi, 2\pi)$ et calculer $\hat{F}(t)$. Quelle relation existe-t'il entre $\hat{F}(t)$ et les deux fonctions $\hat{f}_1(t)$ et $\hat{f}_3(t)$?

(II) A deux éléments f et g de $\mathscr{E}(I)$ on associe la fonction $h = \Gamma(f,g)$ définie par l'intégrale suivante :

$$(2) \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

II-1 Montrer que Γ est une application bilinéaire symétrique ($\Gamma(f,g) = \Gamma(g,f)$) de $\mathscr{E}(I)$ dans $\mathscr{E}(J)$, J étant un invervalle que l'on précisera. Vérifier que h est une fonction de $\mathscr{E}$, paire si f et g ont même parité, impaire si f et g sont de parité opposée.

II-2 A partir d'un élément f de $\mathscr{D}_1(I)$ et d'un élément g de $\mathscr{E}(I)$, on construit la fonction h définie par l'identité (2). Montrer que :

$$h'(x) = \frac{dh}{dx} = \Gamma\left(\frac{df}{dx}, g\right)$$

En déduire que $h' \in \mathscr{E}$.

II-3 Montrer que la relation suivante est satisfaite :

$$\boxed{T\,[\Gamma(f,g)] = T(f) \cdot T(g)}$$

lorsque f et g sont deux élements de $\mathscr{E}(I)$.

II-4 A quel espace de fonctions doit appartenir la fonction f(x) pour que la relation suivante soit vérifiée :

$$\boxed{T\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = (it)^n\, T(f)} \qquad n \in \mathbb{N}$$

(III) III-1 f et g sont deux fonctions définies par les égalités suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{15}\left[\cos(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] & \text{si } |x| \leq 2\pi \\ 0 & \text{si } |x| > 2\pi \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |x| > \pi \end{cases}$$

Déterminer la fonction y(x), nulle pour $|x| > \pi$ telle que :

$$\boxed{\Gamma\ (y,g) = f}$$

III-2 On considère l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + \tau^2\ y = \varphi(x)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

dans laquelle

. τ est un réel positif

. $\varphi(x) = \begin{cases} \Phi\left(x + \frac{\pi}{\tau}\right) & \text{si } x < 0 \\ -\Phi\left(x - \frac{\pi}{\tau}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \Phi \in \mathcal{D}_1\left(-\frac{\pi}{\tau}, \frac{\pi}{\tau}\right)$

. y un élement de $\mathcal{D}_2\left(-\frac{2\pi}{\tau}, \frac{2\pi}{\tau}\right)$

III-2.1 Calculer $\hat{\varphi}(t)$ et exprimer $\hat{y}(t)$ en fonction de $\hat{\Phi}(t)$.

III-2.2 Montrer que y(x) peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi)\ \Phi(\xi)\ d\xi$$

où G est une fonction que l'on déterminera. On s'assurera que

$y \in \mathcal{D}_2\ \left(-\frac{2\pi}{\tau}, \frac{2\pi}{\tau}\right)$.